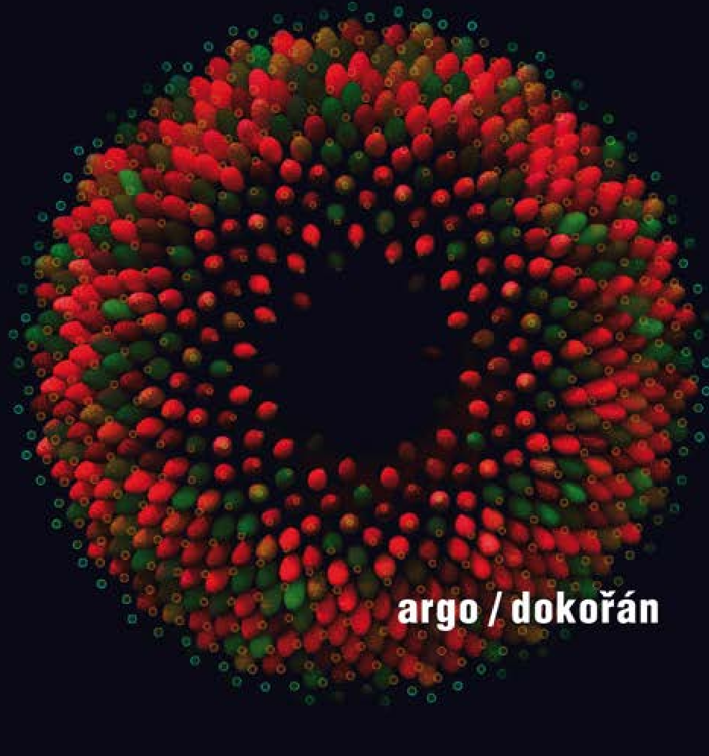
Edward Frenkel

LÁSKA A MATEMATIKA

Srdce skryté skutečnosti



argo / dokořán

Edward Frenkel

LÁSKA A MATEMATIKA

Srdce skryté skutečnosti

ARGO / DOKOŘÁN

Edward Frenkel

LÁSKA A MATEMATIKA

Srdce skryté skutečnosti

Druhé vydání v českém jazyce (první elektronické).
Z anglického originálu *Love and Math: The Heart of Hidden Reality*
přeložil Jan Hůla.
Odpovědný redaktor Zdeněk Kárník.
Grafická úprava Vladimír Fára, sazba Karel Horák.
Obálka podle návrhu Pavla Růta a konverze
do elektronické verze Michal Puhač.
Redakce Marie Černá.
Vydalo v roce 2020 nakladatelství Dokořán, s. r. o.,
Holečkova 9, Praha 5, dokoran@dokoran.cz, www.dokoran.cz,
jako svou 1061. publikaci (334. elektronická).

ISBN 978-80-7363-880-1

Mým rodičům

OBSAH

	Předmluva autora k českému vydání	9
	Předmluva	11
Kapitola 1.	**Záhadné stvoření**	19
Kapitola 2.	**Podstata symetrie**	24
Kapitola 3.	**Pátý řádek**	36
Kapitola 4.	**Kerosinka**	47
Kapitola 5.	**Střípky řešení**	53
Kapitola 6.	**Začínající matematik**	63
Kapitola 7.	**Sjednocená teorie**	76
Kapitola 8.	**Magická čísla**	85
Kapitola 9.	**Rosettská deska**	100
Kapitola 10.	**V začarovaném kruhu**	112
Kapitola 11.	**Dobývání vrcholu**	129
Kapitola 12.	**Strom poznání**	135
Kapitola 13.	**Harvard volá**	145
Kapitola 14.	**Vázání svazků moudrosti**	156
Kapitola 15.	**Jemný tanec**	170
Kapitola 16.	**Kvantová dualita**	186
Kapitola 17.	**Odhalování skrytých souvislostí**	206
Kapitola 18.	**Hledání vzorce lásky**	231
	Doslov	245
	Poděkování	247
	Poznámky	249
	Slovník pojmů	293
	Rejstřík	297

PŘEDMLUVA AUTORA K ČESKÉMU VYDÁNÍ

Dělá mi velkou radost, že *Láska a matematika* vychází v češtině; bude to již 18. překlad anglického originálu. V létě 2018 jsem navštívil Prahu a velmi na mě zapůsobily majestátní kostely, mosty a muzea i venkovní kavárny. Také jsem se zde dozvěděl o dlouhé tradici odvážného a nekonvenčního intelektuálního úsilí, které reprezentují například alchymistické výzkumy Tychona Braha, jakož i práce Johannese Keplera a ostatních vědců pod patronátem císaře Rudolfa II. Jak podotkl Carl Gustav Jung: „[byť se] podle všeobecného mínění alchymisté pokoušeli vyrobit zlato, ve skutečnosti se však snažili osvobodit od iluzí … a dalších neřestí“. Jejich příběhy jsou pro nás aktuální i dnes, kdy procházíme jakousi alchymickou transformací ze stavu odloučení a odcizení do stavu jednoty a úplnosti. Jsem toho názoru, že matematika se bude na tomto procesu z velké části podílet.

Matematika hraje v našem světě čím dál tím zásadnější roli. Informační technologie postavené na matematice se prosazují v našich životech stále rychlejším tempem a přinášejí nejen nové příležitosti a nevídané možnosti komunikace, ale také mnoho výzev, jež se týkají vnímání naší identity a reality, naší kultury, a dokonce i pojetí pravdy. Není divu, že se v tomto prostředí mnoho lidí obrací k matematice a vědě vůbec, aby se v dnešním světě dokázali zorientovat. Mnoho lidí se mě například ptá: „Je život pouze algoritmus? Je člověk pouze sekvencí jedniček a nul? Je láska pouze chemickou reakcí?“ Jsou to důležité otázky, kterými bychom se měli zabývat.

Z tohoto důvodu věřím, že je pro nás všechny důležité, abychom se seznámili s fascinujícími myšlenkami moderní matematiky a na vlastní oči spatřili, čím se ve skutečnosti zabývá. Pouze tak budeme schopni odkrýt její potenciál a transformační sílu.

Způsob, jakým se dnes matematika vyučuje, je bohužel podobný tomu, jako kdybychom se v hodinách výtvarné výchovy učili pouze natírat ploty či stěny a nikdy se nedozvěděli o dílech velkých mistrů. Kvůli tomu mnozí z nás nikdy nespatří zázraky moderní matematiky, nebo ještě hůře – získají k tomuto oboru odpor a řeknou si, že mu nikdy neporozumí. Naše nevědomost a nechuť k matematice potom mohou hrát do karet různým elitám, které zneužívají matematiku k vlastnímu prospěchu. Stačí si vzpomenout na hromadné sledování občanů, finanční machinace či mezinárodní korporace, které se snaží měnit a ovládat naše chování pomocí sociálních sítí a jejich algoritmů s umělou inteligencí – a mnohé další případy. V tomto novém světě se matematika stala mocným nástrojem, který může být použit pro dobré i pro špatné účely. Potřebujeme, aby se matematika stala naším pomocníkem, nikoli nepřítelem, abychom ovládli její sílu.

Cílem této knihy není ani tak vysvětlit čtenářům nějaký konkrétní matematický problém či obor, ale spíše jim poskytnout panoramatický pohled na celou matematiku, aby si uvědomili, že může být jakýmsi portálem do skryté reality, klíčem k porozumění hlubokým pravdám o světě kolem nás – a také k poznání nás samotných.

Matematika vytváří most mezi hmotou a myslí, mezi tím, co z vesmíru můžeme poznat, a tím, co je stále nepoznané a nezhmotněné – co zatím zůstává v říši představivosti. Jako rozhraní mezi realitou a mýtem matematika zosobňuje naši touhu po jednotě, úplnosti a celistvém Já.

Jakmile se otevřeme této věčné eleganci a moudrosti, již se dále nebudeme považovat za malá kolečka ve velkém stroji a uvědomíme si, že jsme tvůrci tohoto světa, kteří si navzájem umí předávat krásu a lásku.

Vítejte v tomto novém světě!
Edward Frenkel, červenec 2019

PŘEDMLUVA

Mimo dosah našich smyslů se nachází tajuplný svět. Skrytý paralelní vesmír plný krásy a elegance, který je složitě propleten s tím naším. Je jím svět matematiky a pro mnohé je neviditelný. Naše kniha je pozvánkou k jeho objevování.

Zamysleme se nad následujícím paradoxem. Na jedné straně je matematika nezastupitelnou součástí našich každodenních životů. Vždy, když provedeme online transakci, pošleme textovou zprávu, zadáme výraz do vyhledávače na internetu nebo použijeme GPS, tak jsou ve hře matematické formule a algoritmy. Na druhé straně má z matematiky většina lidí hrůzu. Slovy básníka Hanse Magnuse Enzensbergera se matematika stala „slepou skvrnou naší civilizace, exteritoriální oblastí, v níž se opevnilo jen několik málo zasvěcenců". Podle něj se nestává, že bychom „narazili na někoho, kdo vehementně tvrdí, že mu pouhá četba románu, podívání se na obraz nebo návštěva kina způsobují nepřekonatelná muka", ale i „inteligentní a vzdělaní lidé" často říkají „s podivnou směsí vzdoru a hrdosti", že matematika je pro ně „čisté mučení" nebo „noční můra".

Kde se vzala taková anomálie? Nabízejí se dvě příčiny. Zaprvé, matematika je abstraktnější než ostatní obory, a proto není tak přístupná. Zadruhé to, co studujeme ve škole, je jen velmi malá část matematiky, která byla navíc z většiny vybudována před více než tisíci lety. Od té doby došlo v matematice k výraznému posunu, jenže poklady moderní matematiky zůstávají pro většinu lidí skryty.

Jak by to vypadalo, kdybyste ve škole měli hodiny výtvarného umění, kde by vás učili pouze natírat plot? Co kdyby vám nikdy neukázali obrazy, které namaloval Leonardo da Vinci nebo Picasso? Byli byste schopni docenit umění? Chtěli byste se o něm dozvědět více? Pochybuji. Pravděpodobně byste řekli něco jako: „Studium umění pro mě bylo ztrátou času. Jestli budu někdy potřebovat natřít plot, tak si na to najmu lidi." Toto je samozřejmě nadsázka, ale takovým stylem se matematika vyučuje, a proto je v očích mnoha z nás stejně zábavná jako sledování zasychajícího nátěru. Zatímco malby velkých mistrů jsou všem k dispozici, matematika velkých mistrů zůstává skryta.

Matematiku tak zajímavou však nedělá jen estetická krása. Slavný je Galileův výrok: „Zákony přírody jsou napsány jazykem matematiky." Matematika je nástrojem k popisu reality a ke zjištění, jak funguje svět. Je to univerzální jazyk, který se stal zlatým standardem pravdy. V našem světě, který je stále více řízen vědou a technologií, se matematika stává zdrojem moci, bohatství a pokroku. Proto hranice pokroku mohou posouvat jen ti, kteří plynule mluví jejím jazykem.

Lidé si často mylně myslí, že matematika může být použita pouze jako jakýsi nástroj: například biolog, který v terénu nashromáždil data z měření, později sestaví matematický model, který tato data vysvětlí. I když i toto je její důležitá součást, matematika nám nabízí mnohem více: umožňuje nám po skocích měnit paradigmata, což bychom bez ní nedokázali. Například Albert Einstein se nesnažil vysvětlit nějaká data pomocí rovnic, když pochopil, že gravitace způsobuje zakřivení prostoru. Ve skutečnosti žádná taková data nebyla k dispozici. Nikdo si dokonce nedokázal ani představit, že by prostor mohl být zakřivený. Všichni pevně věřili, že náš svět je plochý, Einstein však pochopil, že jde o jedinou možnost, jak zobecnit speciální teorii relativity na neinerciální soustavy a zároveň zahrnout svůj vhled, že gravitace a zrychlení mají stejnou podstatu. Byl to netriviální intelektuální výkon na poli matematiky, při kterém Einstein spoléhal na padesát let starou práci matematika Bernharda Riemanna. Zakřivené prostory o více než dvou rozměrech si člověk nedokáže představit, ale pomocí matematiky se s nimi dá pracovat. A hádejte, co se stalo: Einstein měl pravdu, náš vesmír je zakřivený, a navíc se rozpíná. To ilustruje sílu matematiky, o které mluvíme.

Lze najít mnoho podobných příkladů, nejen ve fyzice, ale i v ostatních vědních oborech (některé z nich si ještě uvedeme). Když se podíváme do minulosti, uvidíme, že věda a technologie se díky matematickým idejím stále rychleji transformují. Dokonce i matematické teorie, které se zprvu zdají abstraktní a ezoterické, se později stávají pro aplikace nepostradatelnými. Charles Darwin, jehož práce se o matematiku zpočátku neopírala, později ve své autobiografii napsal: „Hluboce lituji toho, že jsem nedošel dostatečně daleko, abych byl schopen pochopit alespoň některé z nejdůležitějších principů matematiky, protože u člověka, který má tyto schopnosti, se zdá, jako by měl šestý smysl." Je to jasnozřivá rada, která další generace nabádá, aby zúročily nesmírný potenciál, jejž matematika nabízí.

Když jsem vyrůstal, nebyl jsem si tohoto skrytého světa matematiky vědom. Jako většina lidí jsem si myslel, že matematika je suchý a nezajímavý předmět. Měl jsem ale štěstí, v posledním ročníku na střední škole jsem poznal profesionálního matematika, který mi umožnil do tohoto kouzelného světa nahlédnout. Uvědomil jsem si, že matematika je stejně jako poezie, umění a hudba plná možností, elegance a krásy. Zamiloval jsem se do ní.

Drazí čtenáři, chtěl bych pro vás vykonat to, co pro mě vykonali moji učitelé: odkrýt vám sílu a krásu matematiky a umožnit vstup do tohoto kouzelného světa, i kdybyste byli tím typem člověka, který nikdy nepoužil slova „láska“ a „matematika“ v téže větě. Matematika se vám dostane pod kůži, stejně jako se to stalo mně, a váš pohled na svět již nikdy nebude stejný.

* * *

Matematické poznání je jiné než ostatní druhy poznání. Zatímco vnímání fyzického světa může být zkreslené, vnímání matematických pravd zkreslené být nemůže. Jsou to objektivní, trvalé a důležité pravdy. Matematická formule nebo věta má pro každého stejný význam – nehledě na pohlaví, náboženské vyznání nebo barvu pleti – a týž význam bude mít i za tisíc let. Úžasné je však i to, že všechny patří všem. Nikdo si nemůže patentovat matematickou formuli. V tomto světě není nic tak hlubokého a dokonalého, a zároveň tak snadno dostupného. Fakt, že existuje podobná zásobárna vědomostí, je skoro neuvěřitelný. Je příliš vzácná na to, abychom ji ponechali pouze několika zasvěceným – patří nám všem.

Jednou z hlavních funkcí matematiky je organizace informací – totéž, co odlišuje Van Goghovy tahy štětcem od pouhých barevných cákanců. S příchodem 3D tisku se radikálně mění svět, na který jsme zvyklí: veškeré věci přecházejí ze sféry fyzických objektů do sféry informací a dat. Brzy budeme schopni na povel převádět informace na hmotu pomocí 3D tiskáren se stejnou lehkostí, s jakou dnes převádíme PDF soubor na knihu nebo MP3 soubor na hudební skladbu. V tomto novém světě je role matematiky ještě důležitější: role nástroje k organizování a třídění informací a k jejich následné přeměně ve fyzickou skutečnost.

V této knize prozkoumáme jednu z největších myšlenek, které vznikly v matematice za posledních padesát let: Langlandsův program, který je někdy považován za sjednocenou teorii veškeré matematiky. Je to fascinující teorie, která nalézá provokující spojitosti mezi zdánlivě nesouvisejícími matematickými obory: algebrou, geometrií, teorií čísel, analýzou, a dokonce i kvantovou fyzikou. Pokud si tyto obory představíme jako kontinenty ve skrytém světě matematiky, potom může být Langlandsův program dokonalým teleportem, který nás dokáže v mžiku přenést z jednoho kontinentu na druhý.

Program představil koncem šedesátých let Robert Langlands (který v současnosti obývá původní kancelář Alberta Einsteina v Institutu pokročilých studií v Princetonu) a vychází z průlomové matematické teorie symetrií, z myšlenek, které formuloval před dvěma sty lety francouzský génius Évariste Galois těsně před tím, než byl ve věku dvaceti let zabit v souboji. Posléze byl Langlandsův program obohacen o zásadní objev, který nejenže vedl k důkazu velké Fermatovy věty, ale také změnil naše uvažování o číslech a rovnicích. Dalším velkým krokem bylo poznání, že matematika má svoji vlastní Rosettskou desku a že je plná záhadných analogií a metafor. Pomocí této Rosettské desky se Langlandsův program rozšířil na geometrii a kvantovou fyziku, kde do zdánlivého chaosu vnesl řád a harmonii.

O tomto všem si budeme v této knize vyprávět, abychom poodhalili hluboké a překvapující stránky matematiky. Matematika prolamuje konvence a při hledání pravdy je neobyčejně vynalézavá. Tvůrce teorie množin Georg Cantor napsal: „Esence matematiky spočívá v její svobodě.“ Matematika nás učí rigorózně analyzovat realitu, studovat fakta a sledovat, kam vedou. Osvobozuje nás od dogmat a předsudků, rozvíjí schopnost inovovat. Poskytuje tak nástroje, které ji samotnou přesahují.

Tyto nástroje lze použít pro dobré i špatné účely, což nás nutí zvážit dopad matematiky na reálný svět. Například globální ekonomická krize byla z velké části zapříčiněna nevhodným použitím matematických modelů na finančních trzích. Mnozí z předních činitelů těmto modelům pro svou matematickou nevzdělanost nerozuměli, ale kvůli zisku je tvrdohlavě používali dál, až se celý systém skoro zhroutil. Neprávem těžili z privilegovaného přístupu k informacím a doufali, že se na jejich nevědomost nepřijde, protože těmto matematickým modelům nerozuměli ani ostatní. Možná, že kdyby více lidí chápalo, jak tyto modely fungují – jaké jsou zákonitosti systému – netrvalo by jejich zneužívání tak dlouho.

Jako další příklad si vezměme toto: v roce 1996 se v tajnosti sešla komise ustanovená americkou vládou a pozměnila způsob výpočtu indexu spotřebitelských cen, tedy oficiální míry inflace, která ovlivňuje daňová pásma, sociální a zdravotní pojištění a jiné indexované platby. Týkalo se to desítek milionů Američanů, nicméně o metodě výpočtu a jejím dopadu se nekonala skoro žádná veřejná diskuse. Nedávno se navíc uskutečnil pokus o zneužití této záhadné formule k vytvoření zadních vrátek k ekonomice Spojených států.[1]

V matematicky gramotné společnosti by se takové utajené dohody uzavíraly mnohem hůře. Všichni by měli mít přístup k matematickým znalostem a nástrojům, které jsou potřebné k ochraně před náhodnými rozhodnutími, které v matematikou řízeném světě činí pouze několik mocných. Kde není matematika, tam není ani svoboda.

* * *

Matematika je stejně jako umění, literatura a hudba součástí našeho kulturního dědictví. Jako lidé toužíme po objevování nových věcí a významů, po lepším chápání vesmíru a našeho místa v něm. Bohužel už nemůžeme objevit nový kontinent jako Kolumbus ani být první, kdo stane na Měsíci. Co kdybyste se zde dozvěděli, že se nemusíte plavit přes oceán nebo letět do vesmíru, abyste objevili divy světa? Jsou přímo před našimi zraky, propleteny s každodenní realitou, jistým způsobem uvnitř každého z nás. Matematika řídí tok vesmíru a ve skrytu za jeho tvary a křivkami drží otěže všech jevů od nepatrných atomů až po ty největší hvězdy.

Naše kniha je pozvánkou do tohoto pestrého a okouzlujícího světa. Je určena čtenářům bez jakéhokoli matematického vzdělání – pokud si myslíte, že matematika je těžká a že ji nikdy nepochopíte, pokud z ní máte hrůzu, ale zároveň je ve vás přirozená zvědavost, pak je to kniha právě pro vás.

Často narážíme na mylný názor, že člověk musí matematiku studovat roky, aby ji dokázal ocenit. Někteří si dokonce myslí, že jakmile dojde na matematiku, mají vrozenou vadu chápání. S tím nelze souhlasit. Většina z nás má alespoň základní představu o konceptech jako Sluneční soustava, atomy, elementární částice, dvojitá šroubovice DNA a mnoha dalších, aniž by studovali fyziku nebo biologii. Nikdo se nediví, že jsou tyto složité koncepty součástí naší kultury, našeho kolektivního vědomí. Stejně tak může každý pochopit klíčové matematické myšlenky, pokud jsou správně vysvětleny, a nemusí k tomu roky studovat. V mnoha případech se dá přejít rovnou k jádru věci a zdlouhavé kroky přeskočit.

Problém je však v tom, že zatímco celý svět mluví o planetách, atomech a DNA, jen málokdo se obtěžuje hovořit o fascinujících myšlenkách moderní matematiky, jako jsou grupy symetrií, nádherné geometrické tvary zvané Riemannovy plochy nebo nové početní systémy, ve kterých dva a dva nedávají vždy čtyři. Je to podobné, jako by vám někdo ukazoval malé kotě a tvrdil, že takto vypadá tygr. Jenže tygr vypadá úplně jinak. Ukážeme si, jak je tento tygr ve skutečnosti velkolepý, abyste mohli ocenit (slovy Williama Blakea) jeho „děsivou krásu“.

Nepropadejte však přílišnému optimismu. Pouhým přečtením této knihy se z nikoho matematik nestane – a nakonec to ani není nutné. Podívejte se na to takto: když se naučíte pár akordů, tak budete schopni na kytaře zahrát několik písní. Špičkového kytaristu to z vás neudělá, ale obohatí to váš život. V této knize si ukážeme základní akordy moderní matematiky, které vám jsou možná zatím skryty – uvidíte, že to obohatí váš život.

Jeden můj učitel, velký Izrail Mojsejevič Gelfand, říkával: „Lidé si myslí, že matematice nerozumějí, záleží však jen na tom, jak jim problém vysvětlíte. Když se zeptáte opilce, jestli jsou větší 2/3 nebo 3/5, tak vám nebude umět odpovědět. Když mu tu otázku ale zopakujete jinými slovy: jestli jsou lepší 2 láhve vodky pro 3 lidi nebo 3 láhve vodky pro 5 lidí, tak vám hned odpoví, že samozřejmě 2 láhve pro 3 lidi.“ I my se zde budeme snažit vysvětlit celou látku slovy, kterým porozumí každý.

Zároveň vám budu vyprávět o svých zkušenostech z mládí, kdy jsem vyrůstal v bývalém Sovětském svazu, kde se matematika stala jakýmsi útočištěm v tíživé situaci způsobené tehdejším režimem. V důsledku jeho diskriminační politiky mi zakázali vstoupit na půdu Moskevské státní univerzity. Zabouchli mi dveře před nosem. Byl jsem vyvrženec. Ale nevzdal jsem to. Vždy jsem potají vklouzl do univerzitní budovy, abych se mohl účastnit lekcí a seminářů. Samostatně jsem do pozdních nočních hodin čítával knihy o matematice, a nakonec jsem dosáhl svého. Když mě nepustili předními dveřmi, vlezl jsem oknem. Kdo vás může zastavit, když jste zamilovaní?

Pod ochranu si mě vzali dva brilantní matematici a stali se mými mentory. Pod jejich vedením jsem začal provádět svůj výzkum v matematice. Stále jsem byl ještě studentem střední školy, ale už jsem se dotýkal hranic nepoznaného. Byla to nejvíce vzrušující část mého života a dělal jsem to, i když jsem věděl, že za tehdejších poměrů nemám v Sovětském svazu šanci získat práci jako matematik.

Nicméně na mě čekalo překvapení. Moje první publikace se dostaly do světa, staly se známými a já jsem ve věku jednadvaceti let dostal pozvánku na Harvardovu univerzitu. Zázračnou náhodou tehdy perestrojka pozvedla železnou oponu a občané Sovětského svazu mohli vycestovat, takže jsem najednou, ještě bez doktorátu, skončil jako harvardský hostující profesor.

Zvítězil jsem a pokračoval ve své akademické dráze, která můj výzkum vedla k hranicím Langlandsova a umožnila mi být součástí významného pokroku, jenž se v této oblasti v posledních dvaceti letech odehrál. V této knize popíšeme pozoruhodné výsledky mnoha brilantních vědců i to, co se při práci na nich odehrávalo v pozadí.

* * *

Tato kniha je však také o lásce. Jednou jsem měl vizi o matematikovi, který objevil „formuli lásky", což se pak stalo tématem filmu *Obřady lásky a matematiky*, o kterém budeme mluvit později. Kdykoli ten film někomu pustím, tak se mě zeptá: „Opravdu existuje formule lásky?"

Moje odpověď zní: „Každá formule, kterou objevíme, je formulí lásky." Matematika je zdrojem věčného a hlubokého poznání, které vychází z nitra veškeré hmoty a sjednocuje nás napříč kulturami, kontinenty a staletími. Přeji si, abychom všichni byli schopni spatřit, ocenit a užasnout nad kouzlem, krásou a harmonií těchto myšlenek, formulí a rovnic. Věřím, že to dá naší lásce k tomuto světu a k sobě navzájem mnohem vyšší smysl.

NÁVOD PRO ČTENÁŘE

Matematické koncepty v této knize jsem se snažil prezentovat tím nejjednodušším a nejintuitivnějším způsobem, nicméně některé části knihy obsahují celkem těžkou matematiku (obzvlášť části kapitol 8, 14, 15 a 17). Bude úplně v pořádku, pokud při prvním čtení přeskočíte ty partie, které se vám budou zdát příliš náročné. Pokud se k nim vrátíte později, možná pro vás budou snáze stravitelné, vždy však můžete pokračovat v četbě i bez nich.

Rád bych zde zdůraznil, že je naprosto v pořádku, pokud vám něco nebude jasné – já se tak cítím po 90 % času, který věnuji matematice. Vítejte v mém světě. Pocity zmatku či dokonce frustrace jsou nedílnou součástí profese matematika. Podívejte se na to ale ze světlé stránky: jak nudný by byl svět, kdyby vše bylo pochopitelné jen s malým úsilím. To, co dělá matematiku tak vzrušující, je naše touha překonat závoj nevědomosti. Pocit osobního triumfu, poté co něčemu porozumíme, je důvodem, proč stojí za to se jí věnovat.

V této knize se spíše než na technické detaily soustředíme na širší kontext a logické souvislosti mezi různými koncepty a odvětvími matematiky. Hlubší vysvětlení lze často nalézt ve vysvětlivkách, jež zároveň obsahují odkazy na literaturu, nicméně je můžete bez výčitek, alespoň při prvním čtení, přeskočit.

Vzorce jsem se snažil používat co nejméně. Pokud to šlo, tak jsem raději zvolil slovní vysvětlení, a těch několik vzorců, které se občas objeví, můžete dle libosti také přeskočit.

Ještě upozornění k matematické terminologii: ke svému překvapení jsem zjistil, že určité termíny, které matematici používají pro specifické účely, znamenají pro nematematiky něco zcela jiného. Mám na mysli výrazy jako korespondence, reprezentace, skládání, smyčka, nebo teorie. Kdykoli jsem si tento problém uvědomil, přidal jsem do textu vysvětlivku. Vždy, když to bylo možné, jsem se pokusil nahradit nezvyklé matematické výrazy těmi, jejichž význam je průhlednější (například místo termínu „Langlandsova korespondence" používám termín „Langlandsova relace"). Kdykoli se vyskytne slovo, kterému nebudete rozumět, může vám přijít vhod slovník pojmů na konci knihy.

Na mých internetových stránkách http://edwardfrenkel.com naleznete aktualizace a doplňující materiály k této knize. Zároveň tam naleznete také e-mailovou adresu, na kterou mi můžete poslat svoje názory na tuto knihu. Vaší odezvy si budu velice vážit.

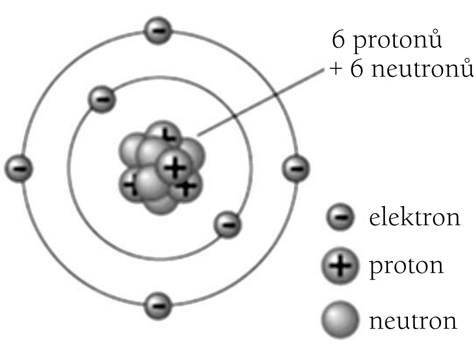
KAPITOLA PRVNÍ

ZÁHADNÉ STVOŘENÍ

Jak se člověk stane matematikem? Může k tomu dojít mnoha způsoby. Povím vám svůj příběh.

Možná vás to překvapí, ale na základní škole jsem matematiku nesnášel. Dobře, „nesnášel" je možná příliš silné slovo. Řekněme tedy, že jsem ji neměl rád. Zdála se mi nudná. Neměl jsem problémy s řešením příkladů, ale nechápal jsem, proč je řešit. Učivo, které jsme probírali v hodinách, se mi zdálo zbytečné a nepodstatné. Co mě opravdu přitahovalo, byla fyzika, zvláště pak fyzika kvantová. S nadšením jsem četl každou populárně-naučnou knihu o kvantové fyzice, na kterou jsem narazil. Vyrůstal jsem v Rusku, kde tyto knihy byly snadno k dostání.

Kvantový svět mě fascinoval. Již v dávných dobách vědci a filozofové přemýšleli o základní povaze vesmíru. Někteří dokonce přišli s hypotézou, že se veškerá hmota skládá z malých částic, které nazvali atomy. Existence atomů byla prokázána na začátku 20. století, ale přibližně ve stejné době vědci zjistili, že i atomy jsou dále dělitelné. Ukázalo se, že každý atom ve svém středu obsahuje jádro, kolem kterého obíhají elektrony. Jádro se dále skládá z protonů a neutronů, jak je vidět na obrázku 1.[1]



Obr. 1: Atom uhlíku.

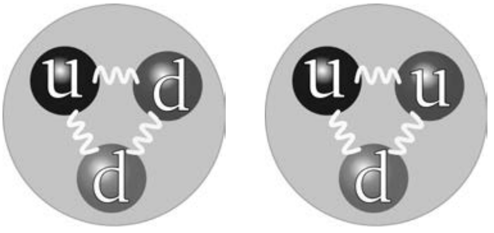
Jak je to s protony a neutrony? V knihách, které jsem četl, bylo napsáno, že je tvoří elementární částice, které se nazývají „kvarky“.

Slovo „kvark“ se mi líbilo, a hlavně to, jak vzniklo. Murray Gell-Mann, objevitel těchto částic, si je vypůjčil z knihy Jamese Joyce s názvem *Plačky nad Finneganem*, ve které je následující posměšná báseň:

Tři kvarky pro pana Marka!
Ten chlapík má jistě na víc.
Zatím vězme, že neukázal skoro nic.

Překvapilo mě, že nějaký fyzik pojmenoval částici podle románu, zvláště tak složitého, jako jsou *Plačky nad Finneganem*. Bylo mi okolo třinácti a už tehdy jsem byl přesvědčen, že se od vědců očekává, že budou samotáři, kteří jsou tak hluboce zabráni do své práce, že nemají zájem o ostatní aspekty života, jako je umění a jiné humanitní směry. Já jsem takový nebyl. Měl jsem spoustu přátel, rád jsem četl a kromě vědy jsem se zajímal o mnoho dalších věcí. Bavilo mě hrát fotbal, s přáteli jsem strávil nesčetné hodiny na hřišti. Zhruba ve stejném období jsem objevil impresionistické malby. Začalo to tím, že jsem v knihovně svých rodičů narazil na tlustý svazek o impresionismu. Van Gogh byl můj favorit. Okouzlen jeho prací jsem dokonce zkoušel malovat sám. To vše ve mně vzbuzovalo pochyby, že bych se mohl stát vědcem. Když jsem se dověděl, že nositel Nobelovy ceny za fyziku Gell-Mann měl tak různorodé zájmy (nejen o literaturu, ale také o lingvistiku, archeologii a jiné), udělalo mi to velkou radost.

Podle Gell-Manna existují dva typy kvarků, horní a dolní. Proporce, v jakých jsou namíchány, udávají charakteristiku protonů a neutronů. Neutron je tvořen ze dvou dolních a jednoho horního kvarku a proton ze dvou horních a jednoho dolního kvarku, jak vidíme na následujících obrázcích.[2]



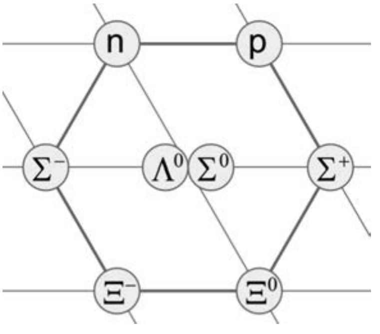
Obr. 2: Neutron a proton.

To bylo celkem srozumitelné, nicméně to, jak vědci zjistili, že protony a neutrony nejsou nedělitelné, už tak zřejmé nebylo.

Na konci padesátých let už bylo známo velké množství zdánlivě elementárních částic, kterým se říká hadrony. Neutrony i protony se řadí mezi hadrony a samozřejmě se o nich ví, že tvoří základní stavební kameny hmoty. Nikdo ale neměl ani tušení, jakou roli hrají ty zbývající hadrony (čili „kdo si je objednal“, jak řekl jeden vědec). Bylo jich tolik, že si významný fyzik Wolfgang Pauli z žertu stěžoval, že se z fyziky stala botanika. Fyzici zoufale hledali způsob, jak hadrony dostat pod kontrolu. Potřebovali objevit skryté principy, které řídí jejich chování, a vysvětlit tuto zdánlivou různorodost.

Gell-Mann a Juval Ne’eman nezávisle na sobě navrhli nové klasifikační schéma. Ukázali, že hadrony mohou být přirozeně rozděleny do dvou menších skupin po osmi a deseti částicích, které nazvali oktety a dekuplety. Částice ve stejné skupině měly vždy obdobné vlastnosti.

V populárních knížkách, které jsem tehdy čítával, byly oktety zobrazovány pomocí následujících diagramů:



Obr. 3: Diagram oktetu.

Proton je zde označen písmenem „p“, neutron písmenem „n“ a šest dalších částic s podivnými názvy označují řecká písmena.

Ale proč zrovna 8 a 10, proč ne třeba 7 a 11? V knihách, které jsem četl, jsem nemohl nalézt smysluplnou odpověď. Často zmiňovaly záhadnou myšlenku, které Gell-Mann říkal „osmidílná cesta“ (čímž odkazoval na Buddhovu „ušlechtilou osmidílnou stezku“), nikde ale nebylo vysvětleno, kde se tato čísla vzala.

Toto chybějící vysvětlení mě hluboce zneklidňovalo. Chtěl jsem tuto záhadu rozluštit, ale nevěděl jsem jak.

Shodou náhod se mi dostalo pomoci od rodinného přítele. Vyrůstal jsem v malém průmyslovém městě s názvem Kolomna, které leží asi sedmdesát kilometrů od Moskvy, což jsou zhruba dvě hodiny vlakem. Moji rodiče zde pracovali jako inženýři ve velké továrně zabývající se těžkým strojírenstvím. Kolomna je město s dlouhou historií, bylo založeno v roce 1177 (pouze třicet let po založení Moskvy) a leží na soutoku dvou řek. Ještě dnes tam nalezneme pár pěkných kostelů a městské hradby, které vypovídají o slavné minulosti tohoto města. Není to ale žádné centrum vzdělanosti. Byla zde jen jedna vysoká škola, pedagogický institut. Jeden z profesorů na této škole, matematik jménem Jevgenij Jevgenijevič Petrov, byl dlouholetým přítelem mých rodičů. Jednou ho moje matka potkala na ulici a dala se s ním do řeči. Matka o mně ráda vyprávěla svým známým, takže i tentokrát na mě došla řeč. Když Jevgenij Jevgenijevič slyšel, že se zajímám o vědu, prohlásil: „Musím ho poznat. Pokusím se ho přitáhnout k matematice."

„To těžko," odvětila matka, „matematiku nemá moc v oblibě. Myslí si, že na ní není nic zajímavého. Chce se věnovat kvantové fyzice."

„Žádný strach," odpověděl Jevgenij Jevgenijevič, „asi už vím, jak změnit jeho postoj."

Domluvili mi tedy schůzku. Nebyl jsem z toho nijak nadšený, ale stejně jsem Jevgenije Jevgenijeviče navštívil v jeho kanceláři.

Bylo mi sotva patnáct let a končil jsem devátou třídu, což byla předposlední třída na druhém stupni. (Byl jsem o rok mladší než moji spolužáci, protože jsem přeskočil šestou třídu.) Jevgenij Jevgenijevič byl skromný a přátelský čtyřicátník. S brýlemi a vousy vypadal přesně tak, jak jsem si tehdy matematika představoval. V jeho velkých očích bylo něco poutavého. Překypovaly zvědavostí na všechno kolem.

Ukázalo se, že Jevgenij Jevgenijevič měl chytrý plán, jak mě obrátit k matematice. Hned jak jsem vešel do jeho kanceláře, zeptal se mě: „Slyšel jsem, že tě zajímá kvantová fyzika. Slyšel jsi o Gell-Mannově osmidílné cestě a kvarkovém modelu?"

„Ano, četl jsem o tom několik populárně-naučných knih."

„A víš, co je základem tohoto modelu? Jak Gell-Mann přišel na tyto myšlenky?"

„No..."

„Slyšel jsi už někdy o grupě SU(3)?"

„SU co?"

„Jak bys mohl pochopit kvarkový model, když nevíš, co je grupa SU(3)?"

Vytáhl ze své knihovny pár knih, otevřel je a ukázal mi stránky plné různých vzorců. Zahlédl jsem tam známé oktetové vzorce, podobné jako na obrázku 3. Nebyly to ale jen pěkné obrázky, byly součástí něčeho, co vypadalo jako souvislé a detailní vysvětlení.

I když jsem nevěděl, kde mají ty formule hlavu a patu, bylo mi jasné, že obsahují odpovědi, které jsem hledal. Byl to okamžik zjevení. Byl jsem fascinován tím, co jsem slyšel a viděl, dotčen něčím, co jsem nikdy dřív nezažil, neuměl jsem to vyjádřit slovy. Bylo to jako nadšení, které člověk prožívá, když slyší hudbu nebo vidí obraz, který vytváří nezapomenutelný dojem. Jediné, co jsem byl schopen říct, bylo „Páni!“.

„Pravděpodobně sis myslel, že matematika je to, co tě učí ve škole,“ řekl Jevgenij Jevgenijevič a zavrtěl hlavou. „Ne, toto je matematika,“ a ukázal na formule v knize. „A pokud opravdu chceš porozumět kvantové mechanice, tak musíš začít tady. Gell-Mann předpověděl kvarky pomocí nádherné matematické teorie. Ve skutečnosti to byl matematický objev.“

„Ale jak bych tomu mohl aspoň trochu porozumět?“

Vypadalo to celkem děsivě.

„Neměj strach. Nejdřív musíš pochopit koncept grupy symetrií. To je hlavní myšlenka. Je na ní založena velká část matematiky a teoretické fyziky. Zde je pár knih, které ti půjčím. Začni je číst a označ si všechny věty, kterým nebudeš rozumět. Můžeme se zde potkávat každý týden a povídat si o tom.“

Půjčil mi knihu o grupách symetrií, a ještě pár dalších na témata, jako jsou *p*-adická čísla (číselný systém, který je velmi odlišný od toho, na který jsme zvyklí) a topologie (obor zabývající se základními vlastnostmi geometrických útvarů). Jevgenij Jevgenijevič měl výborný vkus, našel takovou kombinaci knih, která mi umožnila spatřit to záhadné stvoření jménem Matematika z mnoha různých stran – a nadchnout se pro ni.

Ve škole jsme studovali věci, jako jsou kvadratické rovnice, trocha infinitezimálního počtu, nějakou základní eukleidovskou geometrii a trigonometrii. Domníval jsem se, že se veškerá matematika točí kolem těchto disciplín, snad jen že jde do větší hloubky, avšak knihy, které mi půjčil Jevgenij Jevgenijevič, obsahovaly záblesky ze zcela jiného světa, jehož existenci jsem si ani nedokázal představit.

Okamžitě jsem konvertoval.

KAPITOLA DRUHÁ

PODSTATA SYMETRIE

Většina lidí se domnívá, že matematika se zabývá pouze čísly. O matematicích si myslí, že celé dny tráví chroustáním velkých a ještě větších čísel s exotickými jmény. Také jsem si to myslel – do té doby, než mě Jevgenij Jevgenijevič zasvětil do myšlenek moderní matematiky. Jedna z nich – symetrie – hrála klíčovou roli při objevu kvarku.

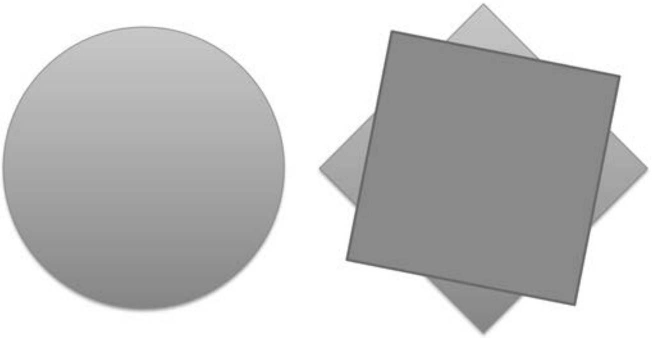
Co je to symetrie? Všichni intuitivně víme, o co jde – poznáme ji na první pohled. Když se někoho zeptáme na příklad symetrického objektu, ukáže motýla, vločku nebo lidské tělo.

Na dotaz, co činí symetrii symetrií, se však každý zdráhá odpovědět. Jevgenij Jevgenijevič mi to vysvětlil následujícím způsobem: „Podívejme se na tento kulatý stůl a tento čtvercový stůl," řekl a ukázal na dva stoly ve své kanceláři. „Který je symetričtější?"

„Samozřejmě že ten kulatý."

„Ale proč? Být matematikem znamená, že se snažíš uvažovat i o tom, co se jeví jako zřejmé. Velmi často budeš překvapen, že i ta nejzřejmější odpověď je nakonec mylná."

Obr. 4: Vločka a motýl. Fotografie vlevo: K. G. Libbrecht.



Obr. 5: Kruh a čtverec. Rotace kulatého stolu o libovolný úhel nezmění jeho obraz, ale rotace čtvercového stolu o úhel jiný, než je násobek 90°, původní obraz změní. (Oba stoly jsou zde zobrazeny shora.)

Když si Jevgenij Jevgenijevič všiml mého zmateného výrazu, tak mi napověděl: „Která vlastnost dělá kulatý stůl symetričtějším?“

Chvíli jsem o tom přemýšlel a pak mi to došlo: „Myslím, že symetrie objektu souvisí s tím, že jeho obraz zůstane stejný, i když samotný objekt nějak transformujeme.“

Jevgenij Jevgenijevič přikyvoval.

„Je to tak. Podívejme se na všechny možné transformace těchto dvou stolů, které zachovají jejich původní obraz. V případě kulatého stolu...“

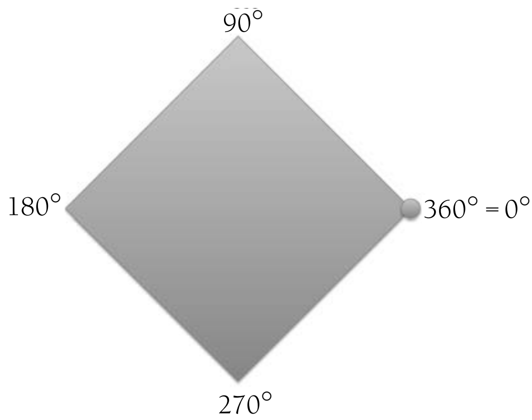
Přerušil jsem ho: „Obraz zůstane stejný při jakémkoli otočení okolo středu. Obraz kulatého stolu bude po otočení vypadat úplně stejně jako před otočením. Když ale o libovolný úhel otočíme čtvercový stůl, tak obecně lze poznat, že se něco změnilo. Jeho původní obraz zachovají pouze rotace o násobky 90 stupňů.“

„Přesně tak! Pokud na chvíli odejdeš z mé kanceláře a já tento kulatý stůl otočím o libovolný úhel, tak si toho nevšimneš. Když ale otočím ten čtvercový o jiný úhel, než je 90, 180 nebo 270 stupňů, tak to poznáš.“

Pak pokračoval: „Takovýmto transformacím se říká symetrie. Takže vidíš, že čtvercový stůl má pouze čtyři symetrie, zatímco kulatý stůl jich má mnohem více – ve skutečnosti jich má nekonečně mnoho. Proto říkáme, že kulatý stůl je symetričtější.“

Toto bylo velmi srozumitelné.

„Nemusíš být matematik, abys to chápal,“ pokračoval Jevgenij Jevgenijevič, „ale pokud už matematikem jsi, tak tě bude zajímat další otázka: jaké jsou *všechny* možné symetrie daného objektu?“



Obr. 6: Rotace čtverce.

Podívejme se na čtvercový stůl. Jeho symetriemi[1] jsou čtyři rotace okolo středu: o 90°, 180°, 270° a 360° – proti směru chodu hodinových ručiček.[2] Matematik by řekl, že *množina* symetrií čtvercového stolu se skládá ze čtyř prvků odpovídajících úhlům 90°, 180°, 270° a 360°. Každá rotace zobrazí vybraný roh (zakroužkovaný v obrázku 6) na jeden ze čtyř rohů.

Jedna z těchto rotací je výjimečná. Konkrétně rotace o 360° je stejná jako rotace o 0°, což je totéž, jako bychom stůl neotočili. Tato symetrie je výjimečná, protože s naším objektem nic neudělá: každý bod stolu zůstane přesně tam, kde byl. Říkáme jí *neutrální symetrie* nebo také *identita*.[3]

Všimněme si, že rotace o úhel vyšší než 360° je stejná jako rotace o nějaký úhel mezi 0° a 360°. Například rotace o 450° je stejná jako rotace o 90°, protože 450 = 360 + 90. Proto se můžeme zabývat pouze rotacemi o úhly mezi 0° a 360°.

Nyní je zásadní si uvědomit, že když po sobě aplikujeme jakékoli dvě rotace z množiny $\{90°, 180°, 270°, 360°\}$, tak výsledná rotace bude také patřit do této množiny. Této výsledné symetrii říkáme *složení* dvou symetrií.

Je to zřejmé: každá z těchto symetrií zachová obraz stolu, proto jej zachová i jejich složení. I složená symetrie tedy musí být symetrií. Například když otočíme stůl o 90° a potom znovu o 180°, tak bude nakonec stůl otočen o 270°.

Podívejme se, co se se stolem děje při těchto symetriích. U rotace o 90° proti směru hodinových ručiček se pravý roh (na předchozím obrázku s tečkou) přemístí nahoru. Když dále aplikujeme rotaci o 180°, tak se tento horní roh dostane dolů – dohromady se tedy pravý roh přesunul dolů, což odpovídá rotaci o 270° proti směru hodinových ručiček.

Zde je ještě jeden příklad:

$$90^\circ + 270^\circ = 0^\circ.$$

Po otočení o 90° a potom znovu o 270° dostaneme rotaci o 360°. Ale výsledek rotace o 360° je stejný jako výsledek rotace o 0°, což je – jak už jsme zmínili výše – neutrální symetrie.

Jinými slovy, druhá rotace o 270° vyruší původní rotaci o 90°. Toto je velmi důležitá vlastnost: jakoukoli symetrii lze *invertovat* (čili neutralizovat), což znamená, že k jakékoli symetrii S existuje jiná symetrie S' taková, že složením těchto dvou symetrií získáme neutrální symetrii. Této symetrii S' se říká *inverze* symetrie S. Takže vidíme, že rotace o 270° je inverzí k rotaci o 90° a stejně tak je inverzí k rotaci o 180° tatáž rotace o dalších 180°.

Zde vidíme, že to, co vypadá jako jednoduchá množina symetrií čtvercového stolu – čtyři rotace $\{90^\circ, 180^\circ, 270^\circ, 0^\circ\}$ – má ve skutečnosti jakousi vnitřní strukturu, jistá pravidla, která určují, jak se členové této množiny navzájem ovlivňují. Podívejme se na ně:

Zaprvé lze tyto symetrie skládat (tedy aplikovat jednu po druhé).

Zadruhé zde existuje jedna výjimečná symetrie, které se říká *identita*. V našem případě je to rotace o 0°. Pokud ji složíme s jakoukoli jinou symetrií, dostaneme tutéž symetrii. Například

$$90^\circ + 0^\circ = 90^\circ, \quad 180^\circ + 0^\circ = 180^\circ$$

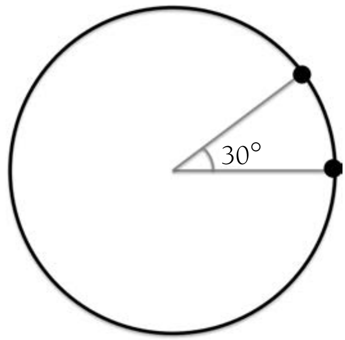
atd.

Zatřetí lze k jakékoli symetrii S najít inverzní symetrii S' takovou, že složením S a S' vznikne identita.

A nyní se dostáváme k hlavnímu bodu: množina rotací spolu s těmito třemi strukturami představuje příklad objektu, kterému matematici říkají *grupa*.

Symetrie jakéhokoli objektu tvoří grupu; typické grupy většinou mívají mnohem více prvků, někdy i nekonečně mnoho.[4]

Podívejme se, jak tomu je u kulatého stolu. Nyní, když už máme nějaké vědomosti, vidíme, že množina všech symetrií kulatého stolu je vlastně množina všech možných rotací (nejen o násobky 90°) a můžeme ji zobrazit jako množinu všech bodů ležících na kružnici, jež tvoří jeho obvod.



Obr. 7: Rotace kružnice.

Každý bod této kružnice odpovídá jednomu úhlu mezi 0° a 360°, který reprezentuje rotaci kulatého stolu proti směru hodinových ručiček o právě tento úhel. Navíc je zde jeden speciální bod, který odpovídá rotaci o 0°. Na obrázku 7 je označen spolu s bodem, který odpovídá rotaci o 30°.

Nicméně body na obvodu kružnice bychom neměli chápat jako body na kulatém stole, ale spíše tak, že každý bod na kružnici představuje určitou rotaci kulatého stolu. Stačí si uvědomit, že kulatý stůl nemá žádný výjimečný bod, ale naše kružnice ho má – konkrétně bod, který odpovídá rotaci o 0°.[5]

Nyní ověřme, zda na množinu bodů na kružnici lze aplikovat tři výše zmíněné struktury.

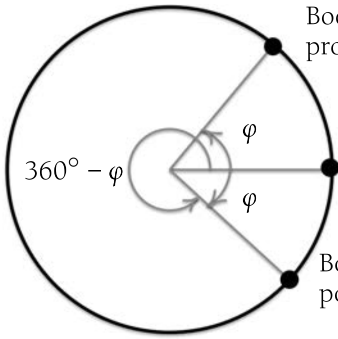
Zaprvé, skládání dvou rotací o úhly φ_1 a φ_2 je rotace o úhel $\varphi_1 + \varphi_2$. Pokud je $\varphi_1 + \varphi_2$ větší než 360°, tak od výsledku jednoduše odečteme 360° – v matematice se tomu říká *sčítání modulo* 360. Například pro $\varphi_1 = 195°$ a $\varphi_2 = 250°$ je součet 445° a rotace o 445° je totéž jako rotace o 85°. Takže pro grupu rotací kulatého stolu platí:

$$195° + 250° = 85°.$$

Zadruhé, na kružnici existuje jeden speciální bod, který odpovídá rotaci o 0° – je to neutrální prvek naší grupy.

Zatřetí, inverzí k rotaci proti směru hodinových ručiček o φ je rotace ve stejném směru o $(360° - \varphi)$, neboli jinak řečeno rotace po směru hodinových ručiček o φ (obrázek 8).

Tím jsme popsali grupu rotací kulatého stolu, které budeme říkat *kruhová grupa* (formálně se pro ni používá název *grupa komplexních čísel na jednotkové kružnici*). Na rozdíl od grupy symetrií čtvercového stolu, která měla čtyři



Obr. 8: Rotace kružnice.

prvky, jich má tato grupa nekonečně mnoho, protože mezi 0° a 360° je nekonečně mnoho úhlů.

Teď už naše intuitivní představa o symetrii stojí na pevných teoretických základech. Vytvořili jsme z ní matematický koncept. Nejdříve jsme postulovali, že symetrie daného objektu je transformace, která zachovává určité vlastnosti tohoto objektu. Potom jsme učinili rozhodující krok: zaměřili jsme se na množinu všech symetrií daného objektu. V případě čtvercového stolu se tato množina skládala ze čtyř prvků (rotací o násobky 90°). V případě kulatého stolu měla tato množina nekonečně mnoho prvků (všech rotací o libovolný úhel reprezentovaných body kružnice). Nakonec jsme popsali jednoduché vlastnosti, které se v této množině symetrií vždy projevují: jednotlivé symetrie lze skládat a získávat tím další symetrie; jedna symetrie v této množině představuje identitu; ke každé symetrii existuje její inverze. (Skládání symetrií zároveň splňuje asociativní vlastnost, která je popsána v poznámce 4.) Tím jsme došli k matematickému konceptu grupy.

Grupa symetrií je abstraktní objekt, který je poměrně odlišný od konkrétního objektu, u kterého jsme začali. Množiny symetrií stolu se (na rozdíl od stolu samotného) nemůžeme dotknout nebo ji uchopit, ale můžeme si ji představit, zakreslit její prvky, studovat ji a hovořit o ní. Nicméně každý prvek této abstraktní množiny má konkrétní význam: reprezentuje určitou transformaci stolu – jeho symetrii.

Matematika se zabývá zkoumáním takovýchto abstraktních objektů a konceptů.

Ukazuje se, že symetrie je zásadním řídícím principem zákonů přírody. Například vločka vytváří přesný šestiúhelníkový tvar, protože v tomto tvaru mají zkrystalizované molekuly vody nejnižší energetický stav. Symetrie vločky jsou rotace o násobky 60°, tedy o 60°, 120°, 180°, 240°, 300° a 360° (což je totéž jako 0°). Vločku můžeme navíc převrátit podél každé z šesti os, které odpovídají těmto rotacím. Všechny tyto rotace a převrácení zachovávají obraz vločky, a tudíž jsou to její symetrie.*

Řekněme, že převrátíme motýla, tedy obrátíme ho vzhůru nohama. Takové převrácení není striktně řečeno jeho symetrií, protože má z jedné strany nohy, a když říkáme, že motýl je symetrický, máme tím na mysli jeho idealizovanou verzi, kde je jeho horní strana totožná s tou dolní (na rozdíl od skutečného motýla). V tomto případě bude obrácení, které zamění levé a pravé křídlo, symetrií. (Také si můžeme představit záměnu křídel, u které nedojde k převrácení motýla.)

To nás přivádí k důležitému bodu: v přírodě se vyskytuje mnoho objektů, které jsou „téměř" symetrické. Skutečný stůl není perfektně kulatý nebo perfektně čtvercový, živý motýl nemá horní a dolní stranu perfektně symetrickou, ani lidské tělo není zcela symetrické. Nicméně i v tomto případě je užitečné použít jejich abstraktní, idealizované verze a modely – perfektně kulatý stůl nebo obraz motýla, u kterého nerozlišujeme mezi jeho horní a dolní stranou. U nich pak zkoumáme symetrie a závěry tohoto zkoumání následně upravíme tak, aby odpovídaly rozdílům mezi skutečným objektem a jeho modelem.

Tímto nechceme říct, že bychom si nevážili asymetrie. Vážíme si jí a často v ní nacházíme krásu, ale hlavním cílem matematické teorie symetrie není estetika – hlavním cílem je formulovat koncept symetrie v co nejobecnějších, tedy v co nejabstraktnějších pojmech, aby bylo možné tento koncept aplikovat stejným způsobem na různé obory, jako je geometrie, teorie čísel, fyzika, chemie, biologie a další. Jakmile vybudujeme takovouto teorii, můžeme se začít bavit o mechanismech, které symetrii narušují – jinými slovy můžeme asymetrii vnímat jako emergentní vlastnost. Například elementární částice nabírají hmotnost, protože dojde k narušení takzvané kalibrační invariance, která je řídí (o kalibrační invarianci si budeme povídat v 16. kapitole). V pozadí tohoto jevu se skrývá Higgsův boson, nezachytitelná částice, která byla nedávno objevena ve Velkém hadronovém urychlovači pod Ženevou.[6]

---

* Všimněme si, že převrácení stolu není jeho symetrií, protože stůl má ze spodní strany nohy. Kdybychom se bavili pouze o čtverci nebo kruhu, potom by i převrácení bylo symetrií a my bychom je museli zahrnout do odpovídající grupy symetrií.